

Tussentoets Calculus I

KdV Instituut, 26 oktober 2007, 9.00-12.00 uur

Gebruik van rekenmachines en eigen formulelijsten is niet toegestaan.

Geef steeds beargumenteerde oplossingen.

Normering: opgave 1: 20 punten, opgaven 2, 3, 4: elk 10 punten.

Beschikbare tijd: 3 uur.

NB: Eventueel ingeleverd kladpapier **kan** door de docent geraadpleegd worden als daardoor meer licht geworpen wordt op je werk. Dit kan in je voordeel maar ook in je nadeel werken! Bedenk verder dat ook een goed gemaakt gedeelte van een opgave punten kan opleveren.

1. De volgende vier onderdelen staan los van elkaar.

a. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan: $z^3 = -8$.

b. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan: $z^2 - (4 - 4i)z - 3 - 4i = 0$.

c. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan: $e^z = -2i - 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$.

d. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan: $z^3 \bar{z}^5 = 4i|z|^4$.

2. De volgende drie onderdelen staan los van elkaar.

a. Als $f(x) = (1 + x^2)^{\sin x}$, bereken dan $f'(x)$.

b. Als $z = x \arctan(xy)$, $x = u - 2v$, $y = u + 2v$, bereken dan $\frac{\partial z}{\partial v}$ (uitgedrukt in u en v) met de kettingregel voor functies van twee variabelen.

c. Bereken $\text{rot}(\text{grad}(xy^2z^3))$

3. Voor elk reeel getal α is het volgende stelsel gegeven, bestaande uit vier vergelijkingen in de veranderlijken x_1, x_2, x_3 en x_4 :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_2 + (1 + \alpha)x_3 + 2x_4 = -1 + \alpha$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2\alpha^2 x_4 = 2\alpha$$

a. Los het stelsel op als $\alpha = -1$

b. Los het stelsel op als $\alpha = 1$

c. Bepaal alle waarde(n) van α waarvoor het stelsel strijdig is.

4.

a. Bepaal de tweede-orde Taylorbenadering $f_2(x)$ van $f(x) = \sqrt{x+3}$ om het punt 1.

b. Geef ook de uitdrukking voor de bijbehorende restterm $R_2(x)$ en laat vervolgens daarmee zien dat $0 < f(x) - f_2(x) < \frac{1}{2^{1/2}}$ als $1 < x < \frac{3}{2}$.