

# Tussentoets Lineaire Algebra najaar 2007

Vermeld s.v.p. de naam van uw werkcollegedocent.

Raadpleeg geen boeken, aantekeningen of anderen dan uzelf.

Stellingen of axioma's die u aanroept, dient u te formuleren.

10 punten per nummer; cijfer =  $(10 + \text{punten})/10$

Veel plezier en succes!

---

(1) De lineaire afbeelding  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heeft ten opzichte van de standaardbasis de matrixvoorstelling  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Bepaal met vegen bases van de kern en het beeld van  $L$ . Wat is de rijrang van de matrix en wat is de kolomrang?

---

Laat  $V$  een vectorruimte zijn en  $v \in V$ .

(2) Waarom is het stelsel  $0_V, v$  lineair afhankelijk?

(3) (*vervolg*) Als  $v_1, \dots, v_n$  lineair onafhankelijk en  $u, v_1, \dots, v_n$  lineair afhankelijk is voor zekere vectoren  $u, v_1, \dots, v_n \in V$ , waarom is dan  $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ ?

(4) (*slot*) Laat  $W$  ook een vectorruimte zijn,  $f : V \rightarrow W$  lineair, en  $\dim(V) = 3$ . Als u 3 lineair onafhankelijke vectoren  $v_1, v_2, v_3$  in  $V$  kunt vinden zodanig dat  $f(v_1), f(v_2)$  ook lineair onafhankelijk is terwijl  $f(v_3) = 0_W$ , waarom is dan  $f(v_1), f(v_2)$  een basis van  $\text{Im}(f)$  en  $v_3$  een basis van  $\text{Ker}(f)$ ?

---

(5) Laat  $U$  het opspansel zijn van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , en  $V$  dat van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bepaal een basis van  $U + V$  en vul deze zo mogelijk aan tot een basis van  $\mathbb{R}^4$ .

---

(6) Hoe groot is de afstand in  $\mathbb{R}^3$  tussen de oorsprong en het vlak  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  en hoe weet u dat?

(7) (*vervolg*) Hoe groot is de sinus van de hoek tussen de  $x$ -as en het vlak  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  en hoe weet u dat?

---

(8) U hebt met de Gauss-eliminatie de volgende echelon-matrix gevonden:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & a & 0 & b & c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & g \end{array} \right)$$

voor zekere getallen  $a, \dots, g \in \mathbb{R}$ . Geef een vectorvoorstelling van de oplossingsverzameling.

---

(9) Laat  $V$  een eindigdimensionale vectorruimte zijn met daarop twee lineaire afbeeldingen,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  en  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Als de kern van  $f$  bevat is in de kern van  $g$ , waarom is er dan een constante  $c \in \mathbb{R}$  met  $g = cf$ , dat wil zeggen  $g(v) = cf(v)$  voor alle  $v \in V$ ?