Samenvatting projectieve meetkunde

Kyndylan Nienhuis

26 mei 2008

2 Projectieve ruimten

Voorstelling Je kan de ruimte doorsnijden met een hypervlak, en lijnen identificeren met hun snijpunt in het hypervlak. Sommige lijnen snijden het hypervlak niet, en je noemt dat punten op oneindig. Deze bekijk je apart. Op deze manier zie je dat er geldt $P^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup P^{n-1}(\mathbb{R})$.

Je kan de ruimte ook doorsnijden met een bol (van dimensie $n-1$). Nu hebben alle lijnen precies twee snijpunten met de bol, en kan je een lijn identificeren met een paar van snijpunten.

Algemene positie Er is een unieke projectieve transformatie die X_i in Y_i overvoert, waarbij $X_1, \ldots, X_{n+2}$ en $Y_1, \ldots, Y_{n+2}$ in algemene positie liggen.

Truc: als v een representatie vector voor X is, dan is λv met $\lambda \neq 0$ dat ook. Als er ergens λv staat waar je dat niet uitkomt, kan je dat vervangen door v. Dit is in het volgende toegepast:

Stel $X_1, \ldots, X_{n+2}$ liggen in algemene positie. We kunnen representatie vectoren kiezen zodat $v_1 = v_2 + \ldots + v_{n+2}$.

Duale ruimte Zij V een vectorruimte over F. De duale vectorruimte $V^\vee$ bestaat uit lineaire transformaties $f : V \to F$. Een basis in V geeft een basis in $V^\vee$, en een transformatie $T : V \to W$ geeft een duale transformatie $T^\vee : W^\vee \to V^\vee$.

Annihilator Een deelruimte $P(U)$ in $P(V)$ komt overeen met de annihilator $P(U^\circ)$ in $P(V^\vee)$. ...

3 Kwadrieken

Kwadratische vormen

Voor een niet-ontaarde vorm geldt als $B(v,w) = 0$ voor alle w dan geldt $v = 0$. Een bilineairvorm is te zien als een matrix $\beta_{ij} = B(v_i, v_j)$. Een basisverandering $w_i = \sum_j P_{ji} v_j$ geeft $\beta' = P^T \beta P$.

Een bilineairvorm $B(v,w)$ geeft een kwadratische vorm $Q(v) = B(v,v)$, en een kwadratische vorm $Q(v)$ legt een bilineairvorm vast door $2B(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$.

Normaalvorm Zij B een kwadratische vorm op een vectorruimte V over F met $\dim V = n$.

- Als $F = \mathbb{C}$, dan is er een basis zodat voor $v = \sum_i z_i v_i$ geldt: $B(v,v) = \sum_{i=1}^m z_i^2$, met $m = n$ als B niet-ontaard.
- Als $F = \mathbb{R}$, dan is er een basis zodat voor $v = \sum_i z_i v_i$ geldt: $B(v,v) = \sum_{i=1}^p z_i^2 - \sum_{j=1}^q z_j^2$, met $p + q = n$ als B niet-ontaard.

Kwadrieken en kegelsneden

De verzamelingen punten $[v] \in P(V)$ waarvoor geldt $B(v,v) = 0$ heet een kwadriek. De dimensie van een kwadriek is $\dim P(V) - 1$; als B niet-ontaard is heet de kwadriek niet-singulier. Een kegelsnede is een één-dimensionale kwadriek.

Rationale parametrisatie

Zij C een niet-singuliere kwadriek, en A een punt op C. Zij $P(U)$ een projectieve lijn die A niet bevat. De afbeelding $\alpha : P(U) \to C$ met $X \mapsto [B(x,x)a - 2B(a,x)x]$ is een bijectie, en A, X, en $\alpha(X)$ zijn collineair.

Poollijnen

Orthogonale complement Zij $U \subseteq V$, we definiëren $U^\perp = \{v \in V | B(v,u) = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$. Er geldt $U = (U^\perp)^\perp$, en als $U \subseteq W$ dan $U^\perp \supseteq W^\perp$, en $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Isomorfie tussen dualen Zij B een niet-ontaarde vorm. Er geldt dat $\beta : V \to V^\vee$ met $v \mapsto f_v$ waarbij $f_v(w) = B(v,w)$ een isomorfisme is. Er geldt $\beta(U^\perp) = U^\circ$.

Poollijnen Zij $X \in P(V)$ met $X = P(U)$, de poollijn van X is het hypervlak $P(U^\perp)$. De volgende dingen gelden voor een niet-singuliere kegelsnede C in het projectieve vlak:

- Elke lijn snijdt de kegelsnede in één of twee punten.
- Zij $P \in C$, de poollijn van P is de unieke raaklijn van C in P.
- Zij $P \notin C$, de poollijn van P snijdt C in twee punten, de raaklijnen van C in deze punten snijden in P.

Lineaire deelrruimten Zij $Q \in P(V)$ een niet-singuliere kwadriek. Er geldt als $P(U) \subseteq Q$ dan $U \subseteq U^\perp$.

Penselen

Laat α, β symmetrische $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$ zijn, met α niet-singulier. Als $\det(\lambda\alpha - \beta) = 0$ precies n verschillende oplossingen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heeft, dan is er een inverteerbare matrix P zodat:

$$P^T \alpha P = I, \qquad P^T \beta P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Penselen Een penseel van kwadrieken voortgebracht door Q en Q' is de verzameling kwadrieken $\lambda Q + \mu Q'$ met $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Zijn C en C' niet-singuliere kegelsneden, waarbij er precies drie singuliere kegelsneden in hun penseel bevat zijn. Dan geldt:

- Het penseel bestaat uit alle kegelsneden door vier punten in algemene positie.
- De singuliere kegelsneden bestaan uit drie paren van lijnen verkregen door disjuncte paren van die vier punten te verbinden.
- Elk van zulk een paar snijdt in een punt met representatie vector v_i, waarbij $\{v_1, v_2, v_3\}$ een basis voor V is zodanig dat de matrices van C en C' tegelijkertijd diagonaliseerbaar zijn.

4 Uitwendige algebra

Het p-de uitwendige macht $\Lambda^p V$ van V met $\dim V = n$, is de duale ruimte met dimensie $\binom{n}{p}$ van de ruimte van alternerende multilineairvormen van graad p. Het uitwendige product $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p = 0$ dan en slechts dan als de vectoren lineair afhankelijk zijn.

Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ induceert een afbeelding $\Lambda^p T : \Lambda^p V \to \Lambda^p W$ met $\Lambda^p T(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = Tv_1 \wedge \ldots \wedge Tv_n$.

Ontbindbaarheid Zij $a \in \Lambda^2 V$ met $a \neq 0$. Er geldt a is ontbindbaar dan en slechts dan als $a \wedge a = 0 \in \Lambda^4 V$.

De kwadriek van Klein