

Analyse 1 - Stellingen en definities

2.1 Definitie Een getal heet een algebraïsch getal als het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

voor alle $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ en $n > 0$. Alle rationale getallen zijn algebraïsche getallen.

2.2 Rational zeros theorem Stel $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ en $r \in \mathbb{Q}$ zo dat r voldoet aan

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

met $n > 0, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. Schrijf $r = \frac{p}{q}$ met $p, q \in \mathbb{Z}$ en $\text{ggd}(p, q) = 1$. Dan deelt q a_n en deelt p a_0 .

3.3 Definitie We definiëren de absolute waarde:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

3.4 Definitie Voor getallen a en b is de afstand $\text{dist}(a, b) = |a - b|$.

3.5 Stelling i) $|a| \geq 0$

ii) $|ab| = |a||b|$

iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$

3.6 $\text{dist}(a, c) \leq \text{dist}(a, b) + \text{dist}(a, c)$

3.7 Driehoeksongelijkheid $|a + b| \leq |a| + |b|$

4.1 Definitie Laat S een niet-lege deelverzameling zijn van \mathbb{R} .

a) Als S een grootste element s_0 bevat (d.w.z.: s_0 behoort tot S en $s \leq s_0 \forall s \in S$), dan noemen we s_0 het maximum van S en schrijven we: $s_0 = \max S$.

b) Als S een kleinste element bevat, noemen we dat het minimum van S en schrijven we $\min S$.

4.2 Definitie Laat S een niet-lege deelverzameling zijn van \mathbb{R} .

a) Als er een reëel getal is M zodat $s \leq M$ voor alle $s \in S$, dan heet M een bovengrens van S en is S boven begrensd.

b) Als er een reëel getal is m zodat $m \leq s$ voor alle $s \in S$, dan heet m een ondergrens van S en is S van onder begrensd.

c) S is begrensd als er zowel een ondergrens als een bovengrens is, dus als er getallen m en M zijn zodat $S \subseteq [m, M]$.

4.3 Definitie Laat S een niet-lege deelverzameling zijn van \mathbb{R} .

a) Als S boven begrensd is en een kleinste bovengrens heeft, dan heet deze bovengrens het supremum van S , genoteerd als $\sup S$.

b) Als S van onder begrensd is en een grootste ondergrens heeft, dan heet deze ondergrens het infimum van S , genoteerd als $\inf S$.

4.4 Completeness Axiom Elke niet-lege deelverzameling $S \subset \mathbb{R}$ die boven begrensd is, heeft een kleinste bovengrens, dus $\sup S$ bestaat en is een reëel getal.

4.5 Elke niet-lege deelverzameling $S \subset \mathbb{R}$ die van onder begrensd is, heeft een grootste ondergrens, dus $\inf S$ bestaat en is een reëel getal.

4.6 Archimedische eigenschap Als $a > 0$ en $b > 0$, dan geldt voor zekere positieve n : $na > b$.

4.7 Denseness of \mathbb{Q} Zij $a, b \in \mathbb{R}$, dan is er een getal $r \in \mathbb{Q}$ zo dat $a < r < b$.

7.1 Definitie Een rij (s_n) van reële getallen convergeert naar een reëel getal s als:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow |s_n - s| < \epsilon$$

9.1 Stelling Convergente rijen zijn begrensd.

9.2 Stelling Als de rij (s_n) convergeert naar s en $k \in \mathbb{R}$, dan convergeert (ks_n) naar ks .

9.3 Stelling Als de rij (s_n) convergeert naar s en (t_n) convergeert naar t , dan convergeert $(s_n + t_n)$ naar $s + t$.

9.5 Lemma Als (s_n) convergeert naar $s \neq 0$ en $s_n \neq 0 \forall n$, dan convergeert $\left(\frac{1}{s_n}\right)$ naar $\frac{1}{s}$.

9.6 Stel dat (s_n) convergeert naar $s \neq 0$ en $s_n \neq 0 \forall n$ en (t_n) convergeert naar t , dan convergeert $\left(\frac{t_n}{s_n}\right)$ naar $\frac{t}{s}$.

9.8 Definitie Voor een rij (s_n) schrijven we $\lim s_n = +\infty$ als

$$\forall M > 0 \exists N : n > N \Rightarrow s_n > M$$

9.9 Stelling Zij (s_n) en (t_n) rijen zo dat $\lim s_n = +\infty$ en $\lim t_n > 0$. Dan is $\lim s_n t_n = +\infty$.

9.10 Stelling Zij (s_n) een rij positieve reële getallen. Dan geldt: $\lim s_n = +\infty \iff \lim \left(\frac{1}{s_n}\right) = 0$.

10.1 Definitie Een rij (s_n) van reële getallen is een niet-dalende rij als $s_n \leq s_{n+1}$ voor alle n en een niet-stijgende rij als $s_n \geq s_{n+1}$. Een rij die niet-stijgend of niet-dalend is, heet monotoon.

10.2 Stelling Alle begrensde monotone rijen convergeren.

10.4 Stelling i) Als (s_n) is een onbegrensde niet-dalende rij is, dan is $\lim s_n = +\infty$

ii) Als (s_n) is een onbegrensde niet-stijgende rij is, dan is $\lim s_n = -\infty$

10.5 Als (s_n) een monotone rij is, dan convergeert de rij of divergeert naar $\pm\infty$. $\lim s_n$ heeft dus altijd een betekenis.

10.6 Definitie Zij (s_n) een rij in \mathbb{R} .

$$\limsup s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \{s_n : n > N\}$$

$$\liminf s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf \{s_n : n > N\}$$

10.7 Stelling Zij (s_n) een rij in \mathbb{R} .

i) als $\lim s_n$ is gedefinieerd, dan $\liminf s_n = \lim s_n = \limsup s_n$

ii) als $\liminf s_n = \limsup s_n$, dan $\liminf s_n = \lim s_n = \limsup s_n$.

10.8 Definitie Een rij (s_n) heet een Cauchy-rij, als:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : m, n > N \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon$$

10.9 Lemma Convergente rijen zijn Cauchy-rijen.

10.10 Lemma Cauchy-rijen zijn begrensde.

10.11 Een rij is een convergente rij d.e.s.d.a. het is een Cauchy-rij.

11.1 Definitie Laat $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij zijn. Een deelrij van deze rij is een rij van de vorm $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ met voor elke k een positief getal n_k zodat $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ en $t_k = s_{n_k}$.

11.2 Stelling Als de rij (s_n) convergeert, dan convergeert elke deelrij tot dezelfde limiet.

11.3 Stelling Elke rij (s_n) heeft een monotone deelrij.

11.4 Gevolg Zij (s_n) een rij. Er bestaat een monotone deelrij waarvan de limiet gelijk is aan $\limsup s_n$ en er bestaat een monotone deelrij waarvan de limiet gelijk is aan $\liminf s_n$.

11.5 Stelling van Bolzano-Weierstrass Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij.

11.6 Definitie Zij (s_n) een rij in \mathbb{R} . Een subsequential limit is een reëel getal of oneindig en de limiet van een deelrij van (s_n) .

11.7 Stelling Zij (s_n) een rij en zij S de verzameling van subsequential limits van (s_n)

- i) S is niet-leeg.
- ii) $\sup S = \limsup s_n$ en $\inf S = \liminf s_n$.
- iii) $\lim s_n$ bestaat dan en slechts dan als S heeft precies één element, namelijk $\lim s_n$.

11.8 Stelling Zij S een rij van subsequential limits van een rij (s_n) Zij (t_n) een rij in $S \cap \mathbb{R}$ en dat $t = \lim t_n$. Dan behoort t tot S .

12.1 Stelling Als (s_n) convergeert naar een positief reëel getal s en (t_n) is een of andere rij, dan geldt: $\limsup s_n t_n = s \cdot \limsup t_n$.

12.2 stelling Zij (s_n) een rij van niet-nul reële getallen. Dan hebben we $\liminf \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| \leq \liminf |s_n|^{-n} \leq \limsup |s_n|^{-n} \leq \limsup \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right|$.

12.3 Gevolg Als $\lim \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right|$ bestaat (en gelijk is aan L), dan bestaat $\lim |s_n|^{-n}$ (en is gelijk aan L).

14.3 Definitie We zeggen dat een reeks $\sum a_n$ voldoet aan het Cauchy criterium als zijn rij (s_n) van deelsommen een Cauchy-rij is:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : m, n > N \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon$$

14.4 Stelling Een reeks convergeert dan en slechts dan als het voldoet aan het Cauchy criterium.

14.5 Gevolg Als een reeks $\sum a_n$ convergeert, dan $\lim a_n = 0$.

14.6 Vergelijkingstest Zij $\sum a_n$ een reeks en $a_n > 0 \forall n$.

1. Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle n , dan convergeert $\sum b_n$.
2. Als $\sum a_n = +\infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle n , dan $\sum b_n = +\infty$.

14.7 Gevolg Absoluut convergente rijen zijn convergent.

14.8 Ratio test Een rij $\sum a_n$ van niet-nul termen

1. convergeert absoluut als $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$
2. divergeert als $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$.
3. In andere gevallen geeft deze test geen informatie.

14.9 Root test Zij $\sum a_n$ een reeks en zij $\alpha = \limsup |a_n|^{-n}$. De reeks $\sum a_n$

- convergeert absoluut als $\alpha < 1$,
- divergeert als $\alpha > 1$

15.1 Stelling $\sum \frac{1}{n^p}$ convergeert dan en slechts dan als $p > 1$.

17.1 Definitie Zij f een reëel-waardige functie, waarvan het domein een deelverzameling is van \mathbb{R} . De functie f is continu in x_0 in $dom(f)$ als, voor elke rij (x_n) in $dom(f)$ die convergeert naar x_0 geldt dat $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$. Als f continu is op elk punt in een deelverzameling $S \subseteq dom(f)$, dan zeggen we dat f continu is in S . De functie f heet continu als f continu is op $dom(f)$.

17.2 Stelling Zij f een reëel-waardige functie waarvan het domein een deelverzameling is van \mathbb{R} . Dan is f continu op $x_0 \in dom(f)$ dan en slechts dan als voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zodat $x \in dom(f)$ en $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

17.3 Stelling Zij f een reëel-waardige functie met $dom(f) \subseteq \mathbb{R}$. Als f continu is in $x_0 \in dom(f)$, dan zijn $|f|$ en kf met $k \in \mathbb{R}$ continu in x_0 .

17.4 Stelling Zij f en g reëel-waardige functies die continu zijn in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dan

- $f + g$ is continu in x_0
- fg is continu in x_0
- $\frac{f}{g}$ is continu in x_0

17.5 Stelling Als f continu is in x_0 en g is continu in $f(x_0)$, dan is de samenstelling $g \circ f$ continu in x_0 .

18.1 Stelling Zij f een continue reëelwaardige functie op een gesloten interval $[a, b]$, dan is f een begrensde functie. Bovendien neemt f zijn maximale en minimale waarden aan op $[a, b]$; d.w.z.: er bestaan $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ voor alle $x \in [a, b]$.

18.2 Tussenwaardstelling Als f een continue reëelwaardige functie is op het interval I , dan heeft f de tussenwaarde-eigenschap op I : als $a, b \in I$ en $a < b$ en y ligt tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan bestaat er minstens één $x \in (a, b)$ zodat $f(x) = y$.

18.3 Gevolg Als f een continue reëelwaardige functie is op een interval I , dan is de verzameling $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ ook een interval of een enkel punt.

18.4 Stelling Zij f een continue strict stijgende functie op een interval I . Dan is $f(I)$ een interval J volgens gevolg 18.3 en f^{-1} is een functie met domein J . De functie f^{-1} is een continue en strict stijgende functie op J .

18.5 Stelling Zij g een strict stijgende functie op een interval J zodat $g(J)$ is een interval I . Dan is g continu op J .

18.6 Stelling Zij f een bijectieve continue functie op een interval I . Dan is f strict stijgend of strict dalend.

23.1 Stelling Definieer $\beta = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ en $R = \frac{1}{\beta}$ voor de machtreeks $\sum a_n x^n$.

- De machtreeks convergeert voor $|x| < R$.
- De machtreeks divergeert voor $|x| > R$.

24.1 Definitie Zij (f_n) een rij van reëel-waardige functies gedefinieerd op een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. De rij (f_n) convergeert puntsgewijs naar een functie f op S als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

voor alle $x \in S$.

24.2 Definitie Zij (f_n) een rij van reëelwaardige functies gedefinieerd op $S \subseteq \mathbb{R}$. De rij (f_n) convergeert uniform op S naar een functie f op S als voor elke $\epsilon > 0$ er een getal N zo dat $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ voor alle $x \in S$ en voor alle $n > N$.

24.3 Stelling De uniforme limiet van continue functies is een continue functie. Sterker nog, zij (f_n) een rij van functies op een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$, stel dat $f_n \rightarrow f$ uniform op S en stel dat $S = \text{dom} f$. Als elke f_n continu is in $x_0 \in S$, dan is f continu in x_0 .

25.2 Stelling Zij (f_n) een rij van continue functies op $[a, b]$ en stel dat $f_n \rightarrow f$ uniform op $[a, b]$. Dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

25.3 Definitie Een rij (f_n) van functies gedefinieerd op $S \subseteq \mathbb{R}$ is uniform Cauchy op S als voor elke $\epsilon > 0$ er een getal N bestaat zodat $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ voor alle $x \in S$ en alle $m, n > N$.

25.4 Stelling Zij (f_n) een rij van functies gedefinieerd op en uniform Cauchy op $S \subseteq \mathbb{R}$. Dan bestaat er een functie f op S zodat $f_n \rightarrow f$ uniform op S .

25.5 Stelling Bescouw een rij $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ van functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. Stel dat elke g_k continu is op S . Dan stelt de reeks een continue functie op S voor.

25.6 Stelling Als een rij $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ van functies voldoet aan het Cauchy criterium uniform op een verzameling S , dan convergeert de reeks uniform op S .

25.7 M-test van Weierstrass Zij (M_k) een rij van niet-negatieve reële getallen met $\sum M_k < \infty$. Als $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S .

26.1 Stelling Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtsreeks met convergentiestraal $R > 0$. Als $0 < R_1 < R$, dan convergeert de machtsreeks uniform op $[-R_1, R_1]$ naar een continue functie.

26.2 Gevolg De machtsreeks $\sum a_n x^n$ convergeert naar een continue functie op het open interval $(-R, R)$.

26.3 Lemma Als de machtsreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R heeft, dan hebben $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ook convergentiestraal R .

26.4 Stelling Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met een convergentiestraal $R > 0$. Dan

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

voor alle $|x| < R$.

26.5 Stelling Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ en

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

voor alle $|x| < R$.

26.6 Stelling van Abel Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met eindige positieve convergentiestraal R . Als de reeks convergeert op $x = R$, dan is f continu op $x = R$. Als de reeks convergeert op $x = -R$, dan is f continu op $x = -R$.

28.1 Definitie Zij f een reëelwaardige functie op een open interval dat het punt a bevat. We zeggen dat f differentieerbaar is in a als de limiet $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat en eindig is.

28.2 Stelling Als f differentieerbaar is in een punt a , dan is f continu in a .

28.3 Stelling Zij f en g differentieerbare functies in a . Dan zijn cf (c een constante), $f + g$, fg en f/g als $g(a) \neq 0$ ook differentieerbaar in a .

- $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$
- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

28.4 Stelling (kettingregel) Als f differentieerbaar in a en g differentieerbaar in $f(a)$, dan is de samenstelling $g \circ f$ differentieerbaar in a en $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

29.1 Stelling Als f gedefinieerd is op een open interval dat x_0 bevat en f zijn maximale of minimale waarde aanneemt in x_0 en f differentieerbaar is in x_0 , dan geldt $f'(x_0) = 0$.

29.2 Stelling van Rolle Zij f een continue functie op $[a, b]$, differentieerbaar op (a, b) die voldoet aan $f(a) = f(b)$. Er bestaat minstens één $x \in (a, b)$ zodat $f'(x) = 0$.

29.3 Middelwaardstelling Zij f een continue functie op $[a, b]$, differentieerbaar op (a, b) . Dan is er minstens één x in (a, b) zodat $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

29.4 Gevolg Zij f een differentieerbare functie op (a, b) zodat $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Dan is f een constante functie op (a, b) .

29.5 Gevolg Zij f en g differentieerbare functies op (a, b) zodat $f' = g'$ op (a, b) , dan bestaat er een constante c zodat $f(x) = g(x) + c$ voor alle $x \in (a, b)$.

29.8 Tussenwaardstelling voor afgeleides Zij f een differentieerbare functie op (a, b) . Als $a < x_1 < x_2 < b$ en c ligt tussen $f'(x_1)$ en $f'(x_2)$, dan bestaat er minstens één $x \in (x_1, x_2)$ zodat $f'(x) = c$.

29.9 Stelling Zij f een bijectieve continue functie op een open interval I en zij $J = f(I)$. Als f differentieerbaar is in $x_0 \in I$ en $f'(x_0) \neq 0$, dan is f^{-1} differentieerbaar in $y_0 = f(x_0)$ en $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

32.1 Definitie Zij f een begrensde functie op een gesloten interval $[a, b]$. Voor $S \subseteq [a, b]$ introduceren we de notatie $M(f, S) = \sup \{f(x) : x \in S\}$ en $m(f, S) = \inf \{f(x) : x \in S\}$. Verder definiëren we:

- Een partitie van $[a, b]$ is een eindige geordende deelverzameling van de vorm $P = \{a < t_0 < \dots < t_n = b\}$.
- De Darboux bovensom $U(f, P)$ van f met betrekking tot P is de som $U(f, P) = \sum_{k=1}^n M(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1})$.
- De Darboux ondersom $L(f, P)$ van f met betrekking tot P is de som $L(f, P) = \sum_{k=1}^n m(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1})$.
- De Darboux bovenintegraal $U(f)$ van f over $[a, b]$ is $U(f) = \inf \{U(f, P) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$
- De Darboux onderintegraal $L(f)$ van f over $[a, b]$ is $L(f) = \sup \{L(f, P) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$

32.2 Lemma Zij f een begrensde functie op $[a, b]$. Als P en Q partities zijn van $[a, b]$ en $P \subseteq Q$, dan $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$.

32.3 Lemma Als f een begrensde functie is op $[a, b]$ en als P en Q partities zijn van $[a, b]$, dan $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

32.4 Stelling Als f een begrensde functie op $[a, b]$ is, dan $L(f) \leq U(f)$.

32.5 Stelling Een begrensde functie f op $[a, b]$ is integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat van $[a, b]$ zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

32.6 Definitie De mesh van een partitie P is de maximale lengte van de subintervallen waaruit P bestaat. Dus als $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, dan $\text{mesh}(P) = \max \{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\}$.

32.7 Stelling Een begrensde functie f op $[a, b]$ is integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $\text{mesh}(P) < \delta \Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ voor alle partities P van $[a, b]$.

32.8 Definitie Zij f een begrensde functie op $[a, b]$ en zij P een partitie van $[a, b]$. Een Riemann som van f die bij de partitie P hoort is een som van de vorm $\sum_{k=1}^n f(x_k)(t_k - t_{k-1})$ met $x_k \in [t_{k-1}, t_k]$ voor alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

32.9 Stelling Een begrensde functie f op $[a, b]$ is Riemann integreerbaar dan en slechts dan als het Darboux integreerbaar is.

33.1 Stelling Elke monotone functie f op $[a, b]$ is integreerbaar.

33.2 Stelling Elke continue functie f op $[a, b]$ is integreerbaar.

33.3 Stelling Zij f en g integreerbare functies op $[a, b]$ en zij c een reëel getal. Dan is cf integreerbaar en geldt $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ en dan is $f + g$ integreerbaar en geldt $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

33.4 Stelling Als f en g integreerbaar zijn op $[a, b]$ en als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$, dan $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

33.5 Stelling Als f integreerbaar is op $[a, b]$, dan is $|f|$ integreerbaar op $[a, b]$ en $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

33.6 Stelling Als f een functie is op $[a, b]$ en als $a < c < b$ en f integreerbaar is op $[a, c]$ en op $[c, b]$, dan is f integreerbaar op $[a, b]$ en $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

33.7 Definitie Een functie f op $[a, b]$ is stuksgewijs monotoon als er een partitie P van $[a, b]$ bestaat, zodat f monotoon is op elk interval (t_{k-1}, t_k) . De functie f is stuksgewijs continu als er een partitie P bestaat zodat f uniform continu is op elk interval (t_{k-1}, t_k) .

33.8 Stelling Als f een stuksgewijs continue functie of een begrensde stuksgewijs monotone functie is op $[a, b]$, dan is f integreerbaar op $[a, b]$.

33.9 Tussenwaardstelling voor integralen Als f een continue functie is op $[a, b]$, dan hebben we voor minstens één $x \in [a, b]$ zodat $f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

34.1 Hoofdstelling van Calculus I Zij g een continue functie op $[a, b]$, differentieerbaar op (a, b) en zij g' integreerbaar op $[a, b]$, dan

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a)$$

34.2 Stelling (partiële integratie) Zij u en v continue functies op $[a, b]$, differentieerbaar op (a, b) en u' en v' integreerbaar op $[a, b]$, dan

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

34.3 Hoofdstelling van Calculus II Zij f een integreerbare functie op $[a, b]$. Voor $x \in [a, b]$, zij

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Dan is F continu op $[a, b]$. Als f continu is in $x_0 \in (a, b)$, dan is F differentieerbaar in x_0 en $F'(x_0) = f(x_0)$.

34.4 Stelling Zij u een differentieerbare functie op een open interval J zodat u' is continu en zij I een open interval zodat $u(x) \in I$ voor alle $x \in J$. Als f continu is op I , dan is $f \circ u$ continu op J en

$$\int_a^b f \circ u(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$