

# Survival Guide to Calc II

---

## Hoe overleef ik elke integraal?

Mijn bedoeling is om een stappenplan te geven voor het oplossen van elke integraal van Calc II. Je kunt dit natuurlijk niet bij je tentamen gebruiken, dus dit is ongeveer wat je moet kennen.

### Enkele Integralen:

#### - Lijnintegralen over scalar-veld:

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\int_C f(x, y, z) ds$

- Stap 1: Parametriseer C

Dus schrijf C als:

$$C = r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \text{ met } t \text{ van } t_0 \rightarrow t_1$$

Er zijn geen echte tips voor deze stap.

- Stap 2: Herschrijf  $f$

Bij de vorige stap heb je formules verkregen voor  $x$ ,  $y$  en  $z$ , schrijf nu:

$$f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t))$$

Gewoon invullen dus.

- Stap 3: Vindt de snelheid over C

Bepaal:

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2}$$

- Stap 4: Schrijf de integraal op:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$$

Hierna is het gewoon integreren en dat zou na Calc I geen probleem moeten zijn.

#### - Lijnintegralen over vector-veld:

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\int_C F \cdot dr$

- Stap 1: Parametriseer C

Dus schrijf C als:

$$C = r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \text{ met } t \text{ van } t_0 \rightarrow t_1$$

Er zijn geen echte tips voor deze stap.

- Stap 2: Bepaal de afgeleides:

Neem:  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  en  $\frac{dz}{dt}$

- Stap 3: Herschrijf de integraal:

De integraal is van de vorm:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

Maak hier van:

$$\int_C \left[ F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

Je vult dus de parametrisatie in in het vector-veld en vermenigvuldigt met  $\frac{dt}{dt}$ . Die laatste mededeling is heel natuurkundig en de wiskundigen zullen er niet blij mee zijn, maar Zagaris heeft in het college aangetoond dat dit is waar je heen wilt, alleen zo is het eenvoudig te onthouden. Nu is het weer teruggebracht tot een Calc I integraal.

### - Speciaal geval: Kringintegraal over vector-veld:

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\oint_C F \cdot dr$

Deze integralen zijn gewoon met bovenstaande methode uit te rekenen, alleen kan het zo zijn dat je bij stap 4 vast loopt, als je probeert de integraal uit te rekenen. Hiervoor is de stelling van Stokes.

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS$$

Het integratie domein is het oppervlak omsloten door de kringintegraal. De richting van de normaalvector op het oppervlak (naar boven of beneden) kan je bijvoorbeeld vinden door met je vingers van je rechterhand langs de lijn te gaan van de kringintegraal in de richting waarin je die uitrekenet. Je duim wijst dan in de richting van de normaalvector, of onthoud gewoon tegen de klok in is naar boven.

Over het algemeen zul je dit type in het tentamen herkennen doordat als je  $\nabla \times F$  neemt, je ziet dat er veel tegen elkaar wegvalt of er een mooi integratie domein overblijft. Je zit nu wel met een oppervlakte integraal over een vector-veld, zie hieronder voor de berekening daarvan.

## Dubbele Integralen:

### - Oppervlakte Integralen over scalar-veld

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\iint_S f(x, y, z) dS$

- o Stap 1: Parametriseer het oppervlak

S is te schrijven als een functie van twee variabelen:

$$S = r(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \text{ met } u \in [u_1, u_2] \text{ en } v \in [v_1, v_2]$$

- o Stap 2: Bepaal dS

$$dS = \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv$$

- o Stap 3: Stel de integraal op:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv$$

Dit is dan wel geen Calc I integraal meer, maar ik ga ervan uit dat je dit nu moet kunnen oplossen.

## - Oppervlakte Integralen over vector-veld

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\iint_S F \cdot \hat{n} dS$

- Stap 1: Parametriseer het oppervlak

S is te schrijven als een functie van twee variabelen:

$$S = r(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \text{ met } u \in [u_1, u_2] \text{ en } v \in [v_1, v_2]$$

- Stap 2: Bepaal  $\hat{n} dS$

$$\hat{n} dS = \pm \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dudv$$

De  $\pm$  komt van de onbekende richting van de normaal vector, want deze kan twee kanten op wijzen uit een oppervlak. Deze richting is of gegeven in het probleem, of je kunt hem bepalen aan de hand van de eerder genoemde methode.

- Stap 3: Herschrijf F

Vul de formules uit de parametrisatie van S in in F:

$$F(x, y, z) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

- Stap 4: Schrijf de integraal op:

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left( \pm \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \right) dudv$$

Er resteert om een dubbelintegraal uit te rekenen.

## - Speciaal geval: Gesloten Oppervlak over vector-veld

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\oiint_S F \cdot \hat{n} dS$

Deze integralen zijn ook uit te rekenen met bovenstaande methode, maar zoals je al ziet, de laatste formule kan redelijk irritant ingewikkeld worden als het niet allemaal mooi uitkomt. Daarom is er de stelling van Gauss.

$$\oiint_S F \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

Het volume dat omsloten is door het **gesloten** oppervlak vormt het nieuwe integratie domein. In het tentamen zal je deze nodig hebben als de afgeleides van de componenten van F gedeeltelijk of geheel tegen elkaar weg vallen, en dus de berekening vereenvoudigen. Wat je nu overhoudt is een volume integraal over een scalar-veld. Dit komt nu aan de orde.

## Driedubbele integralen:

### - Volume integraal over scalar-veld:

Dit omvat alle integralen van de vorm:  $\iiint_V f(x, y, z) dV$

- Stap 1: Vind de grenzen

Bijvoorbeeld:  $z \in [g(x, y), h(x, y)]$ ,  $y \in [k(x), l(x)]$  en  $x \in [x_1, x_2]$

- Stap 2: Stel de integraal op:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{k(x)}^{l(x)} \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Dit zou je nu gewoon moeten kunnen uitrekenen. Misschien is het niet handig om de grenzen in de gegeven volgorde te kiezen, maar zorg er **altijd** voor dat je niet een variabele tegenkomt in je grenzen waar je al over heb geïntegreerd.

## Veranderen van Coördinatenstelsel:

Met wat voor reden dan ook, kan het soms handig zijn om van coördinatenstelsel te veranderen. Ik geef de twee meest gebruikelijke en de algemene methode. Gewoon stampen helaas.

### Cilindercoördinaten (3D) = Poolcoördinaten (2D) + z-coördinaat:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$dxdydz = r dr d\theta dz$$

### Poolcoördinaten (3D):

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

### Algemeen:

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$dxdydz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

## Algemene Tips & Trucs

Op elke niveau van het uitrekenen zijn er afsnijwegen te bedenken waardoor je eerder bij het antwoord komt, maar bovenstaande stappenlijst moet je altijd bij het juiste antwoord brengen.

Dingen die erg helpen zijn:

- Symmetrie: Als een functie antisymmetrisch is over een symmetrisch domein is de bijdragen van die functie aan de integraal nul en dus kan je de hele term uit de integraal knikkeren. Als een functie over meerder delen van het domein hetzelfde is, hoef je slechts één deel uit te rekenen en te vermenigvuldigen met het aantal keer dat het herhaald wordt.
- In bovenstaande lijst ga ik er zo vaak mogelijk vanuit dat alles gebeurt in  $\mathbb{R}^3$ . Als het probleem beperkt is tot  $\mathbb{R}^2$ , is bij de parametrisatie  $z$  meestal een constante, waardoor de afgeleides dus uit de formules wegvallen, want die zijn dan toch nul. Alles blijft nog wel werken, maar doe niet te veel werk.
- Naast deze integralen lijst zijn er nog twee onderwerpen waar het tentamen waarschijnlijk over gaat. Ik zou zeggen dat er met grote zekerheid een vraag in komt over het optimaliseren van een functie, dus leer §13.1 & 13.2. Maar het kan ook dat hij een vraag doet over Taylor-expansie van een functie gecombineerd met een limiet vraag, dus kijk daar ook even naar. Ik verwacht dat er geen vragen komen, die buiten deze onderwerpen vallen, maar je weet natuurlijk nooit.

Succes allemaal